ECON 2200, Kjerneregelen + litt maksimering: Handout

Kjell Arne Brekke

February 10, 2011

1 Innledning

Samme oppfordring som vanlig: Prøv deg på oppgavene før forelesningen, men fortvil ikke om du ikke får det til, dette skal jeg gå gjennom.

2 Kjerneregelen

Vi husker den vanlige kjerneregelen.

$$f(x) = g(u(x))$$

gir

$$f'(x) = g'(u)u'(x)$$

To eksempel er eksempel er

$$\begin{aligned} f(x) &= (3+x)^2 \\ g(x) &= (3-x)^3 \end{aligned}$$

Vi skriver disse to funksjonene som

$$f(x) = u^2 \text{ der } u(x) = 3 + x$$

$$g(x) = v^3 \text{ der } v(x) = 3 - x$$

Og kjerneregelen gir

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2u \cdot u'(x) = 2(3+x) \\ g'(x) &= 3v^2 \cdot v'(x) = 3(3-x)^2(-1) = -3(3-x)^2 \end{aligned}$$

Betrakt så

$$F(x) = f(x) + g(x) = (3+x)^2 + (3-x)^3$$

da vet vi at

$$F'(x) = f'(x) + g'(x) = 2(3+x) - 3(3-x)^2$$

Men med flere variable trenger vi ikke å ta hvert trinn for seg men vi kan skrive

$$F(x) = G(u, v) = u^2 + v^3 \text{ der } u(x) = 3 + x \text{ og } v(x) = 3 - x$$

Vi har da brukt begge kjernene på en gang. Når vi deriverer må vi så ta hensyn til at x påvirker både u og v:

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'_u(u, x)u'(x) + G'_v(u, v)v'(x) = 2u \cdot u'(x) + 3v^2 \cdot v'(x) \\ &= 2(3 + x) - 3(3 - x)^2 \end{aligned}$$

Vi har da slått sammen begge trinnene i ett. Siden G nå har to variable kan vi operere med to kjernefunksjoner u og v. Alt annet er identisk med regnestykket over.

Ligningen blir tilsvarende om vi lar u og v avhenge av flere variable

$$H(x, y) = G(U, V) = U^2 + V^3 \text{der } U(x, y) = y + x \text{ og } V(x, y) = y - x$$

Oppgave 1 *Hva blir*

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}?$$

Merk at $H(x, y)$ er som $F(x)$ bare at konstanten 3 er byttet med en variabel y. Hvilken betydning har det når vi deriverer med hensyn på x?

3 Maksimering med flere variabler

Førsteordensbetingelser

En ås som er deriverbar i alle retninger er også bare flat på toppen. Akkurat som funksjoner av en variabel er flat på toppen.

Det gir oss førsteordensbetingelsen:

Theorem 1 *En deriverbar funksjon $z = f(x, y)$ kan bare ha et maksimum eller minimum i et indre punkt i mengden S dersom det er et* ***stasjonært*** *punkt, dvs*

$$f'_x(x, y) = 0 \text{ og } f'_y(x, y) = 0$$

Eksempel

La oss prøve å finne maksimum for funksjonen

$$f(x, y) = 3x + 7y + xy - 2x^2 - 4y^2.$$

Løsningskandidatene er da stasjonære punkt så vi deriverer og får

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 3 + y - 4x = 0 \\ f'_y(x, y) &= 7 + x - 8y = 0 \end{aligned}$$

Dette gir oss to ligninger og to ukjente. Fra første ligning ser vi at

$$\begin{aligned} 3 + y &= 4x \\ y &= 4x - 3 \end{aligned}$$

Det setter vi inn i den andre ligningen, slik at det bare inngår x i den andre ligningen.

$$\begin{aligned} 7 + x - 8y &= 0 \\ 7 + x - 8\,(4x - 3) &= 0 \\ 31 - 31x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Vi setter det tilbake i første ligning

$$\begin{aligned} 3 + y &= 4x = 4 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Vi har altså funnet et stasjonært punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$, men er dette et maksimum, eller minimum eller ingen av delene? Det vet vi ikke enda.

Oppgave 2 *Finn stasjonærpunktene til funksjonen*

$$f(x, y) = 4x + 8y - 2x^2 - 4y^2.$$